

Wechseln? Neue Variationen zum Ziegenproblem

HEINZ HAAKE, MINDEN

Zusammenfassung: *Fast 20 Jahre nach der Vorstellung des Ziegen-Problems in dem Wochenmagazin DIE ZEIT wurde in einem weiteren ZEIT-Artikel eine Variation des Problems betrachtet, bei welcher der Kandidat angeblich dann im Vorteil ist, wenn er bei der zuerst gewählten Tür bleibt. Im folgenden Aufsatz soll untersucht werden, welche Variationen der Spielregeln und der daraus resultierenden Spielleiterstrategien einen Türwechsel für den Kandidaten vorteilhaft oder nachteilig erscheinen lassen.*

1 Einleitung

Im Juli 1991 stellte Gero von Randow in einem ZEIT-Artikel (von Randow 1991) das aus den USA stammende Ziegenproblem vor und widmete diesem im folgenden Jahr sogar ein ganzes Buch (von Randow 1992). Schnell hat das Problem Einzug in den Schulunterricht gefunden (Klemisch 1993) und fehlt mittlerweile in kaum einer Einführung in die Stochastik.

Weil die Thematik allgemein bekannt sein dürfte, folgt hier nur eine knappe Schilderung: In einer Spielshow hat der Kandidat die Auswahl zwischen drei Türen. Hinter einer Tür steht der Gewinn, ein Auto, hinter den anderen beiden lauern als Nieten zwei Ziegen. Nachdem der Kandidat eine Tür gewählt hat, öffnet der Spielleiter eine Tür, hinter welcher sich eine Ziege befindet, und gibt dem Kandidaten die Gelegenheit, von der gewählten Tür auf die verbleibende geschlossene Tür zu wechseln. Es sorgte selbst bei einigen Mathematikern für Verblüffung, dass der Kandidat bei konsequentem Wechseln seine Gewinnwahrscheinlichkeit von einem auf zwei Drittel steigern kann.

In einem ZEIT-Artikel vom 22. Juli 2010 (Drösser 2010) zitiert Christoph Drösser den Biostatistiker Jan Schuller aus Brüssel mit der Aussage: „Es ist langfristig besser, nicht zu wechseln!“ Schuller geht dabei von einer durchaus realistischen Variation der Spielregeln aus, bei welcher der Spielleiter entscheiden kann, ob er nach der Erstwahl des Kandidaten eine Tür öffnet oder alle Türen geschlossen hält. In der ursprünglichen Version dieses Aufsatzes nahm ich an, dass bis auf die Entscheidungsoption des Spielleiters alle weiteren Spielregeln beibehalten würden. Insbesondere sollte dem Kandidaten ein Türwechsel auch dann ermöglicht werden, falls der Moderator al-

le Türen geschlossen hält. Im folgenden werde ich diese Regel als die „Wechsel-immer-möglich“-Regel bezeichnen.

Die Überlegungen in den Abschnitten 2 bis 5 werden ergeben, dass bei der „Wechsel-immer-möglich“-Regel das Wechseln der Tür weiterhin günstiger ist. Im zweiten Abschnitt werden erste Erkenntnisse durch Betrachtung exemplarischer absoluter Häufigkeiten gewonnen. Dabei sind bis auf ein intuitives Verständnis des empirischen Gesetzes über die Stabilisierung relativer Häufigkeiten keine Stochastikkenntnisse erforderlich. Durch die Verwendung von etwas mehr (Schul-)Mathematik lassen sich in den Abschnitten 3 bis 5 präzisere Ergebnisse erzielen.

Der Schulgutachter machte mich darauf aufmerksam, dass nach seiner Interpretation der im ZEIT-Artikel beschriebenen Variation der Spielregeln der Kandidat keine Gelegenheit zum Türwechsel erhält, falls der Spielleiter alle Türen geschlossen hält. Auf meine Nachfrage bestätigte Herr Schuller die Interpretation des Schulgutachters (Schuller 2011). Diese Spielvariante soll im folgenden die „Wechsel-nur-nach-Öffnung“-Regel genannt werden. Die Untersuchungen in Abschnitt 6 werden zeigen, dass der Kandidat unter den Bedingungen der „Wechsel-nur-nach-Öffnung“-Regel auf einen Türwechsel verzichten sollte, falls der Spielleiter hinreichend boshaft ist.

Auf Anregung des Hochschulgutachters möchte ich in Abschnitt 7 auf Aspekte der Modellierung des Ziegenproblems eingehen.

Abschließend werde ich in Abschnitt 8 die unterschiedlichen Spielregeln unter den Aspekten Einschaltquoten und finanzieller Belastung des Fernsehsenders diskutieren.

Beiden Gutachtern danke ich für ihre konstruktiven, sehr hilfreichen Vorschläge.

2 Ein elementarer Zugang mit absoluten Häufigkeiten

Beim klassischen Ziegenproblem öffnet der (faire) Spielleiter grundsätzlich eine „Ziegentür“. Wechselt der Kandidat daraufhin konsequent zur anderen geschlossenen Tür, beträgt seine Gewinnwahrscheinlichkeit zwei Drittel. Zur Begründung betrachten wir 300 Kandidaten. Durchschnittlich 200 von ihnen

werden im ersten Versuch eine „Ziegentür“ wählen. Öffnet nun der Spielleiter die verbleibende „Ziegentür“, gelangen die 200 Kandidaten durch den Türwechsel wie von selbst an den Gewinn. Somit gewinnen im Durchschnitt zwei Drittel der Kandidaten durch den Wechsel ein Auto.

Ein boshafter Spielleiter öffnet – wie im ZEIT-Artikel beschrieben – nur dann manchmal eine Tür, wenn der Kandidat zunächst auf die „Autotür“ getippt hat, andernfalls hält er alle Türen geschlossen. Sollte der Kandidat auch in diesem Fall konsequent die Tür wechseln, sinkt seine Gewinnwahrscheinlichkeit auf ein Drittel. Auch dieses lässt sich mit Hilfe des folgenden Zahlenbeispiels plausibel machen: Wir betrachten 300 Kandidaten, die grundsätzlich die Tür wechseln. Im Durchschnitt werden 100 Kandidaten zuerst auf die „Autotür“ tippen. Da sie anschließend die Tür wechseln, entgeht ihnen der Gewinn. Durchschnittlich 200 Kandidaten wählen zunächst eine „Ziegentür“. Als Folge des anschließenden Türwechsels tippen durchschnittlich 100 von ihnen auf die „Autotür“. Also gewinnt im Durchschnitt ein Drittel der Kandidaten ein Auto.

Sollte ein boshafter Spielleiter stur seine Strategie verfolgen, dann sollten die Kandidaten trotzdem wechseln, aber nur dann, wenn der Spielleiter alle Türen geschlossen hält. Dadurch steigt die Gewinnwahrscheinlichkeit wieder auf zwei Drittel, wie das folgende Zahlenbeispiel verdeutlicht: Betrachten wir 300 Kandidaten, die die boshafte Strategie des Spielers durchschaut haben. Durchschnittlich 100 von ihnen werden zunächst auf die „Autotür“ tippen. Öffnet der boshafte Spielleiter eine Tür, dann können sie davon ausgehen, dass sie auf den Gewinn getippt haben, und wechseln nicht. Durchschnittlich 200 Kandidaten werden zunächst eine „Ziegentür“ wählen, woraufhin der Spielleiter alle Türen geschlossen hält. Bei konsequenter Umwahl werden im Durchschnitt 100 Kandidaten zur „Autotür“ wechseln. Also erzielen insgesamt im Mittel 200 von 300 Kandidaten einen Gewinn.

Ein wohlwollender Spielleiter öffnet immer nur dann eine Tür, wenn der Kandidat zunächst auf eine „Ziegentür“ getippt hat, und hält alle Türen geschlossen, falls der Kandidat zunächst auf die „Autotür“ getippt hat. Der Kandidat sollte dann bei seiner Wahl bleiben, falls alle Türen geschlossen bleiben, und nur wechseln, falls der Spielleiter eine Tür geöffnet hat. Bei dieser Strategie gewinnt der Kandidat stets das Auto.

3 Baumdiagramm zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten

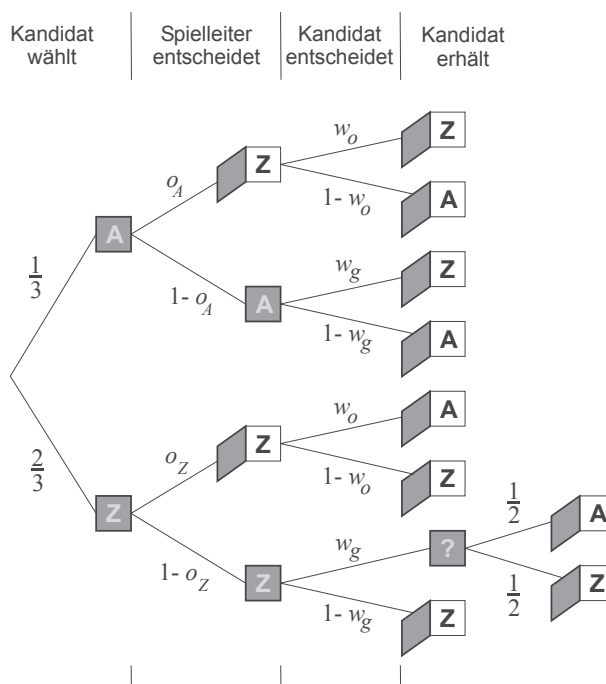


Abb. 1: Baumdiagramm zum Spielverlauf

Dabei ist

- o_A die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass der Spielleiter eine Tür öffnet, nachdem der Kandidat das Auto gewählt hat.
- o_Z die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass der Spielleiter eine Tür öffnet, nachdem der Kandidat eine Ziege gewählt hat.
- w_o die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass der Kandidat die Tür wechselt, nachdem der Spielleiter eine Tür geöffnet hat.
- w_g die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass der Kandidat die Tür wechselt, nachdem der Spielleiter alle Türen geschlossen hält.

Mit Hilfe der Pfadregeln lässt sich die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines Autogewinns wie folgt ermitteln:

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot (o_A(1 - w_o) + (1 - o_A)(1 - w_g)) + \frac{2}{3} \cdot (o_Z w_o + (1 - o_Z) w_g \cdot \frac{1}{2})$$

Ausmultiplizieren und Faktorisieren führen zu folgenden Darstellungen von $P(A)$

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot (1 + (w_g - w_o)o_A + (2w_o - w_g)o_Z) \quad (1)$$

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot (1 + (2o_Z - o_A)w_o + (o_A - o_Z)w_g) \quad (2)$$

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot (1 + o_Z w_o + (o_Z - o_A)(w_o - w_g)) \quad (3)$$

Die oben durch Betrachtung von Zahlenbeispielen gewonnenen Ergebnisse lassen sich unmittelbar aus (3) ermitteln.

Spielleiter	Kandidat	$P(A)$
fair $o_A = o_Z = 1$	wechselt stets	$\frac{2}{3}$
	$w_o = w_g = 1$	$\frac{1}{3}$
boshaft $o_A = 1, o_Z = 0$	wechselt stets	$\frac{1}{3}$
	$w_o = w_g = 1$	$\frac{2}{3}$
wechselfrei $o_A = 1, o_Z = 0$	wechselt nicht bei Öffnung	$\frac{2}{3}$
	$w_o = 0, w_g = 1$	$\frac{1}{3}$
wohlwollend $o_A = 0, o_Z = 1$	wechselt bei Öffnung $w_o = 1, w_g = 0$	1

Tab. 1: Auswirkungen einiger Strategien

4 Strategien bei bekanntem Spielleiterverhalten

In diesem Abschnitt sollen optimale Kandidatenstrategien bei *bekannter* Spielleiterstrategie diskutiert werden. Aus (3) folgt unmittelbar, dass für $o_Z > o_A$ der Kandidat bei Öffnung einer Tür immer wechseln und ansonsten bei seiner Wahl bleiben sollte ($w_o = 1$ und $w_g = 0$ mit $P(A) = \frac{1}{3} \cdot (1 + 2o_Z - o_A)$).

Für $o_Z < o_A$ betrachten wir in (2) den Term

$$(2o_Z - o_A)w_o + (o_A - o_Z)w_g$$

als Funktion der Variablen w_o und w_g mit den Parametern o_A und o_Z . Der Graph dieser Funktion ist eine Ebene, weshalb die Extremwerte der Funktion über den Eckpunkten des Einheitsquadrates $[0; 1] \times [0; 1]$ zu finden sind. Die Extremwerte ergeben sich aus der Untersuchung der Koeffizienten der Variablen w_o und w_g , siehe Tab. 2.

Fazit: Unter den Bedingungen der „Wechsel-immermöglich“-Regel kann der Kandidat bei jedem Spielleiterverhalten durch die Wahl einer geeigneten Wechselstrategie erreichen, dass seine Gewinnwahrscheinlichkeit mehr als ein Drittel beträgt. Lediglich, wenn der Spielleiter nie eine Tür öffnet oder der Kandidat nie wechselt, verharrt die Gewinnwahrscheinlichkeit bei einem Drittel.

Parameter	Strategie	$P(A)$
$(2o_Z - o_A \geq 0$ und $o_A - o_Z \geq 0)$	$w_o = 1$ und $w_g = 1$	$\frac{1}{3} \cdot (1 + o_Z)$
$o_Z \leq o_A \leq 2o_Z$		
$(2o_Z - o_A \geq 0$ und $o_A - o_Z < 0)$	$w_o = 1$ und $w_g = 0$	$\frac{1}{3} \cdot (1 + 2o_Z - o_A)$
$o_A < o_Z$		
$(2o_Z - o_A < 0$ und $o_A - o_Z \geq 0)$	$w_o = 0$ und $w_g = 1$	$\frac{1}{3} \cdot (1 + o_A - o_Z)$
$o_A > 2o_Z$		
$(2o_Z - o_A < 0$ und $o_A - o_Z < 0)$	—	—
ist unmöglich		

Tab. 2: Optimale Strategien des Kandidaten

5 Mittlere Gewinnwahrscheinlichkeiten bei unbekannter Spielleiterstrategie

In der Regel dürfte der Spielleiter seine Strategie nicht offen legen. Dann könnte als erster Ansatz von einer „Gleichverteilung“ der Wahrscheinlichkeiten o_A und o_Z ausgegangen werden. Betrachten wir jetzt die Darstellung (1). Analog zum obigen Abschnitt kann der Term

$$\frac{1}{3} (1 + (w_g - w_o)o_A + (2w_o - w_g)o_Z)$$

als Funktion der Variablen o_A und o_Z mit den Parametern w_o und w_g interpretiert werden. Der Graph auch dieser Funktion ist eine Ebene. Wir betrachten den Körper, der über dem Einheitsquadrat $[0; 1] \times [0; 1]$ von der Ebene begrenzt wird. Dieser Körper bildet zusammen mit seinem am Punkt

$$P\left(\frac{1}{2} \mid \frac{1}{2} \mid \frac{1}{3} \left(1 + \frac{w_o}{2}\right)\right)$$

gespiegelten Bild eine quadratische Säule mit der Höhe $h = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{w_o}{2}\right)$. Demnach ergibt sich bei „Gleichverteilung“ der Wahrscheinlichkeiten o_A und o_Z eine „mittlere“ Gewinnwahrscheinlichkeit

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{w_o}{2}\right). \quad (4)$$

Dass in diesem Term die Wahrscheinlichkeit w_g nicht vorkommt, ist plausibel, weil bei Gleichverteilung

von o_A und o_Z der Kandidat keine neue Information erhält, wenn der Spielleiter alle Türen geschlossen hält. Im Fall der Gleichverteilung sollte der Kandidat immer wechseln, falls der Spielleiter eine Tür öffnet.

6 Untersuchung der „Wechsel-nur-bei-Öffnung“-Regel

Die „Wechsel-nur-bei-Öffnung“-Regel lässt sich mit Hilfe der Überlegungen aus den Abschnitten 2 bis 5 einfach untersuchen, da diese durch den Spezialfall $w_g = 0$ beschrieben werden kann (Zur Erinnerung: w_g bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, dass der Kandidat einen Türwechsel vornimmt, falls der Spielleiter alle Türen geschlossen hält). Aus (2) ergibt sich dann die Wahrscheinlichkeit für einen Autogewinn als

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot (1 + (2o_Z - o_A)w_o).$$

Bei bekannter Spielleiterstrategie sollte der Kandidat demnach immer wechseln, falls $o_A < 2o_Z$ gilt, und nie wechseln, falls $o_A > 2o_Z$ gilt. Für den Fall $o_A = 2o_Z$ beträgt die Gewinnwahrscheinlichkeit, unabhängig von der Wechselentscheidung des Kandidaten, stets ein Drittel.

Bei „Gleichverteilung“ der Wahrscheinlichkeiten o_A und o_Z führt auch die „Wechsel-nur-nach-Öffnung“-Regel zur „mittleren“ Gewinnwahrscheinlichkeit in (4).

7 Anmerkungen zur Modellierung

Die Modellierung wird bestimmt durch die Spielregeln, die Vorgehensweise des Spielleiters und die Reaktion des Kandidaten. Während durch die Spielregeln die Modellierung eindeutig festgelegt ist, gestaltet sich die Modellierung des Spielleiterverhaltens schwieriger. Wie oben angesprochen wird der Spielleiter wohl kaum seine Strategie offen legen. Wer die Wahrscheinlichkeiten o_A und o_Z mittels relativer Häufigkeiten schätzt, sollte darauf gefasst sein, dass der Spielleiter seine Strategie jederzeit ändern kann. Sinnvoll ist die Modellierung mittels Wahrscheinlichkeiten sicherlich dann, falls der Spielleiter seine Entscheidungen mit Hilfe eines Zufallsmechanismus trifft. Eine solche Vorgehensweise sollte der Spielleiter durchaus erwägen, weil er sonst – eventuell unbewusst – einer von den Kandidaten vorhersehbaren Strategie folgt.

8 Anmerkungen zu den Spielregeln

Der Ansatz in Abschnitt 3 umfasst mehrere Spielregeln: Mit $o_A = o_Z = 1$ wird das ursprüngliche Zie-

genproblem dargestellt. Der Spielleiter *muss* eine Tür öffnen, der Kandidat *kann* die Tür wechseln. Bei der „Wechsel-immer-möglich-Regel“ *kann* der Spielleiter eine Tür öffnen und ebenso *kann* der Kandidat die Tür wechseln. Bei der „Wechsel-nur-nach-Öffnung“-Regel *kann* der Spielleiter eine Tür öffnen, aber der Kandidat *darf* nur einen Türwechsel vornehmen, wenn der Spielleiter zuvor eine Tür geöffnet hat.

Aus Zuschauersicht dürfte die ursprüngliche Regel eher uninteressant sein, da der Spielleiter eher eine Statistenrolle einnimmt. Umgekehrt dürfte bei der „Wechsel-nur-nach-Öffnung“-Regel die Spielleiterrolle als zu dominant empfunden werden. Aus Zuschauersicht dürfte die „Wechsel-immer-möglich“-Regel am reizvollsten sein, deshalb die höchsten Zuschauerquoten erreichen und damit für die höchsten Werbeeinnahmen sorgen. Andererseits sind die Gewinnquoten der Kandidaten zu berücksichtigen, die bei der „Wechsel-immer-möglich“-Regel höher als bei der „Wechsel-nur-nach-Öffnung“-Regel zu erwarten sind. Vielleicht entscheidet sich der Fernsehsender letztendlich für die „Wechsel-nur-nach-Öffnung“-Regel mit den Parametern $o_A = 1$ und $o_Z = \frac{1}{2}$. Immerhin wird dann der Spielleiter in durchschnittlich zwei Drittel aller Fälle eine Tür öffnen, und die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt, unabhängig von der Wechselstrategie des Kandidaten, ein Drittel.

Literatur

- von Randow, G. (1991): Eingebung nützt nichts. In: *DIE ZEIT* 30. www.zeit.de/1991/30/Eingebung-nuetzt-nichts (Zugriff: 1.7.2011).
- von Randow, G. (1992): *Das Ziegenproblem*. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt.
- Klemisch, I. (1993): Ein Einstieg über das Drei-Türen-Problem. In: *Stochastik in der Schule* 13 (1), S. 9–14.
- Drösser, C. (2010): Der maliziöse Moderator. In: *DIE ZEIT* 30. www.zeit.de/2010/30/N-Ziegenproblem (Zugriff: 1.7.2011).
- Schuller, J. C. (2011): The malicious host: A minimax solution of the Monty Hall Problem. Erscheint in: *Journal of Applied Statistics*.

Anschrift des Verfassers

Heinz Haake
Dützer Dorfstr. 22
32429 Minden
Heinz.Haake@t-online.de